Extinction partielle et conservativité pour les processus de branchement multitypes

Clément Lamoureux

11 décembre 2025

Explosion des processus de branchement continus
PBC
Étude de l'explosion
Exctinction partielle pour les processus multitypes
PBCM
Couplage des PBCM
Extinction partielle
Conservativité pour les processus multitypes
Conservativité pour les PBCM
Résultats généraux

1 Explosion des processus de branchement continus
- PBC
- Étude de l'explosion

2 Exctinction partielle pour les processus multitypes
- PBCM
- Couplage des PBCM
- Extinction partielle

3 Conservativité pour les processus multitypes
- Conservativité pour les PBCM
- Résultats généraux

Extinction partielle et conservativité pour les PBCM
Clément Lamoureux
Explosion des processus de branchement continus
PBC
Étude de l'explosion
Exctinction partielle pour les processus multitypes
PBCM
Couplage des PBCM
Extinction partielle
Conservativité pour les processus multitypes
Conservativité pour les PBCM
Résultats généraux

Explosion des processus de branchement continus

Table des matières

1 Explosion des processus de branchement continus
- PBC
- Étude de l'explosion

2 Exctinction partielle pour les processus multitypes
- PBCM
- Couplage des PBCM
- Extinction partielle

3 Conservativité pour les processus multitypes
- Conservativité pour les PBCM
- Résultats généraux

Extinction partielle et conservativité pour les PBCM
Clément Lamoureux
Explosion des processus de branchement continus
PBC
Étude de l'explosion
Exctinction partielle pour les processus multitypes
PBCM
Couplage des PBCM
Extinction partielle
Conservativité pour les processus multitypes
Conservativité pour les PBCM
Résultats généraux

Définition

Un Processus de Branchement Continu (PBC) est un processus de Markov $Z = (Z_t, t \geqslant 0)$ à valeurs dans $\mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}$ qui satisfait la propriété de branchement :

$$\forall \lambda, t, x, y \geqslant 0,\ \mathbb{E}_{x+y}\left(e^{-\lambda Z_t}\right) = \mathbb{E}_x\left(e^{-\lambda Z_t}\right)\mathbb{E}_y\left(e^{-\lambda Z_t}\right),$$

où $\mathbb{P}_x$ est la loi de Z partant de x.

Cette propriété implique l'existence d'une fonction différentiable $u_t(\lambda)$ qui vérifie

$$\mathbb{E}_x\left(e^{-\lambda Z_t}\right) = e^{-x u_t(\lambda)},$$

et u est solution de

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t} u_t(\lambda) = -\psi(u_t(\lambda)) \\ u_0(\lambda) = \lambda \end{cases} \iff \int_{u_t(\lambda)}^{\lambda} \frac{du}{\psi(u)} = t,$$

où ψ est l'exposant de Laplace d'un processus de Lévy sans sauts négatifs.

Extinction partielle et conservativité pour les PBCM
Clément Lamoureux
Explosion des processus de branchement continus
PBC
Étude de l'explosion
Exctinction partielle pour les processus multitypes
PBCM
Couplage des PBCM
Extinction partielle
Conservativité pour les processus multitypes
Conservativité pour les PBCM
Résultats généraux

Définition

Un Processus de Branchement Continu (PBC) est un processus de Markov $Z = (Z_t, t \geqslant 0)$ à valeurs dans $\mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}$ qui satisfait la propriété de branchement :

$$\forall \lambda, t, x, y \geqslant 0,\ \mathbb{E}_{x+y}\left(e^{-\lambda Z_t}\right) = \mathbb{E}_x\left(e^{-\lambda Z_t}\right)\mathbb{E}_y\left(e^{-\lambda Z_t}\right),$$

où $\mathbb{P}_x$ est la loi de Z partant de x.

Cette propriété implique l'existence d'une fonction différentiable $u_t(\lambda)$ qui vérifie

$$\mathbb{E}_x\left(e^{-\lambda Z_t}\right) = e^{-x u_t(\lambda)},$$

et u est solution de

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t} u_t(\lambda) = -\psi(u_t(\lambda)) \\ u_0(\lambda) = \lambda \end{cases} \iff \int_{u_t(\lambda)}^{\lambda} \frac{du}{\psi(u)} = t,$$

où ψ est l'exposant de Laplace d'un processus de Lévy sans sauts négatifs.

Extinction partielle et conservativité pour les PBCM
Clément Lamoureux
Explosion des processus de branchement continus
PBC
Étude de l'explosion
Exctinction partielle pour les processus multitypes
PBCM
Couplage des PBCM
Extinction partielle
Conservativité pour les processus multitypes
Conservativité pour les PBCM
Résultats généraux

Définition/Proposition

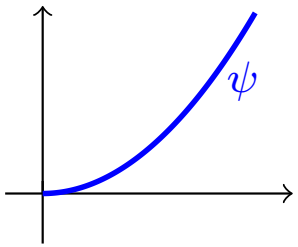
On dit que Z est non conservatif ($= Z$ explose) si il peut atteindre l'état ∞ en un temps fini avec probabilité strictement positive. Cela est satisfait ssi il existe $t > 0$ tel que $u_t(0) > 0$, et se traduit sur son mécanisme de branchement par la condition de Grey

$$\int_{0+} \frac{du}{|\psi(u)|} < \infty \iff \mathbb{P}_x(\zeta < \infty) > 0,$$

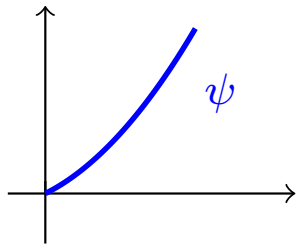
avec $\zeta = \inf\{t \geqslant 0, Z_t = \infty\}$.

Extinction partielle et conservativité pour les PBCM
Clément Lamoureux
Explosion des processus de branchement continus
PBC
Étude de l'explosion
Exctinction partielle pour les processus multitypes
PBCM
Couplage des PBCM
Extinction partielle
Conservativité pour les processus multitypes
Conservativité pour les PBCM
Résultats généraux

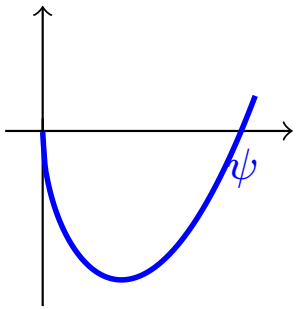
Le comportement en l'infini de X un processus de Lévy sans sauts négatifs d'exposant ψ, est déterminé par $\psi'(0+)$



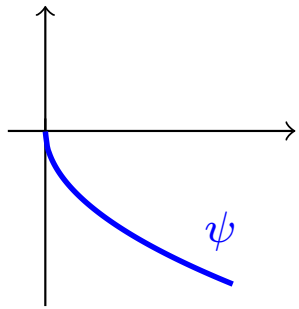
(1) $\psi'(0+) = 0$ et X oscille



(2) $\psi'(0+) > 0$, $\lim_{t\to\infty} X_t = -\infty$



(3) $\psi'(0+) < 0$, $\lim_{t\to\infty} X_t = \infty$, $t \mapsto X_t$ non croissante



(4) $\psi'(0+) < 0$, $\psi \leqslant 0$, X subordinateur

Table des matières

1 Explosion des processus de branchement continus
- PBC
- Étude de l'explosion

2 Exctinction partielle pour les processus multitypes
- PBCM
- Couplage des PBCM
- Extinction partielle

3 Conservativité pour les processus multitypes
- Conservativité pour les PBCM
- Résultats généraux

Extinction partielle et conservativité pour les PBCM
Clément Lamoureux
Explosion des processus de branchement continus
PBC
Étude de l'explosion
Exctinction partielle pour les processus multitypes
PBCM
Couplage des PBCM
Extinction partielle
Conservativité pour les processus multitypes
Conservativité pour les PBCM
Résultats généraux

Définition : Transformée d'Esscher

Soit ψ l'exposant de Laplace d'un processus de Lévy sans sauts négatifs. Pour tout réel $\varepsilon > 0$, on définit ψ_ε pour $\lambda \geqslant 0$ par

$$\psi_\varepsilon(\lambda) = \psi(\lambda + \varepsilon) - \psi(\varepsilon).$$

La fonction ψ_ε est encore l'exposant de Laplace d'un procesuss de Lévy sans sauts négatifs.

On considère $(\varepsilon_n)_{n\geqslant 0}$ une suite décroissante de réels, telle que $\lim_n \varepsilon_n = 0$.
Pour $n \geqslant 0$, on définit $\psi^{(n)}(\lambda) := \psi(\lambda + \varepsilon_n) - \psi(\varepsilon_n)$.
On note que $(\psi^{(n)})'(0+) = \psi'(\varepsilon_n) \in (-\infty, \infty)$, ce qui implique

$$\int_{0+} \frac{du}{|\psi^{(n)}(u)|} = \infty$$

Extinction partielle et conservativité pour les PBCM
Clément Lamoureux
Explosion des processus de branchement continus
PBC
Étude de l'explosion
Exctinction partielle pour les processus multitypes
PBCM
Couplage des PBCM
Extinction partielle
Conservativité pour les processus multitypes
Conservativité pour les PBCM
Résultats généraux

Définition : Transformée d'Esscher

Soit ψ l'exposant de Laplace d'un processus de Lévy sans sauts négatifs. Pour tout réel $\varepsilon > 0$, on définit ψ_ε pour $\lambda \geqslant 0$ par

$$\psi_\varepsilon(\lambda) = \psi(\lambda + \varepsilon) - \psi(\varepsilon).$$

La fonction ψ_ε est encore l'exposant de Laplace d'un procesuss de Lévy sans sauts négatifs.

On considère $(\varepsilon_n)_{n\geqslant 0}$ une suite décroissante de réels, telle que $\lim_n \varepsilon_n = 0$.
Pour $n \geqslant 0$, on définit $\psi^{(n)}(\lambda) := \psi(\lambda + \varepsilon_n) - \psi(\varepsilon_n)$.
On note que $(\psi^{(n)})'(0+) = \psi'(\varepsilon_n) \in (-\infty, \infty)$, ce qui implique

$$\int_{0+} \frac{du}{|\psi^{(n)}(u)|} = \infty$$

Extinction partielle et conservativité pour les PBCM
Clément Lamoureux
Explosion des processus de branchement continus
PBC
Étude de l'explosion
Exctinction partielle pour les processus multitypes
PBCM
Couplage des PBCM
Extinction partielle
Conservativité pour les processus multitypes
Conservativité pour les PBCM
Résultats généraux

- On rappelle la définition $\psi^{(n)}(\lambda) = \psi(\lambda + \varepsilon_n) - \psi(\varepsilon_n)$ pour $n \geqslant 0$.
- $\psi^{(n+1)} - \psi^{(n)}$ est encore l'exposant de Laplace d'un subordinateur. Alors, sur un même espace probabilisé, on peut construire $(S^{(n)}, n \geqslant 0)$ une suite indépendante de processus de Lévy d'exposant $\psi^{(n+1)} - \psi^{(n)}$, et $X^{(0)}$ d'exposant $\psi^{(0)}$.
- $X^{(n)} := X(0) + \sum_{k=0}^{n-1} S^{(k)}$ est une suite croissante de processus de Lévy, et $X^{(n)}$ a pour exposant $\psi^{(n)}$.

Théorème

On peut construire un espace probabilisé sur lequel on peut définir une suite croissante $(X^{(n)})$ de processus de Lévy (d'exposant $\psi^{(n)}$), qui converge uniformément sur tout intervalle fermé de $\mathbb{R}_+$, presque sûrement, vers un processus de Lévy X d'exposant de Laplace ψ.

Extinction partielle et conservativité pour les PBCM
Clément Lamoureux
Explosion des processus de branchement continus
PBC
Étude de l'explosion
Exctinction partielle pour les processus multitypes
PBCM
Couplage des PBCM
Extinction partielle
Conservativité pour les processus multitypes
Conservativité pour les PBCM
Résultats généraux

- On rappelle la définition $\psi^{(n)}(\lambda) = \psi(\lambda + \varepsilon_n) - \psi(\varepsilon_n)$ pour $n \geqslant 0$.
- $\psi^{(n+1)} - \psi^{(n)}$ est encore l'exposant de Laplace d'un subordinateur. Alors, sur un même espace probabilisé, on peut construire $(S^{(n)}, n \geqslant 0)$ une suite indépendante de processus de Lévy d'exposant $\psi^{(n+1)} - \psi^{(n)}$, et $X^{(0)}$ d'exposant $\psi^{(0)}$.
- $X^{(n)} := X(0) + \sum_{k=0}^{n-1} S^{(k)}$ est une suite croissante de processus de Lévy, et $X^{(n)}$ a pour exposant $\psi^{(n)}$.

Théorème

On peut construire un espace probabilisé sur lequel on peut définir une suite croissante $(X^{(n)})$ de processus de Lévy (d'exposant $\psi^{(n)}$), qui converge uniformément sur tout intervalle fermé de $\mathbb{R}_+$, presque sûrement, vers un processus de Lévy X d'exposant de Laplace ψ.

Extinction partielle et conservativité pour les PBCM
Clément Lamoureux
Explosion des processus de branchement continus
PBC
Étude de l'explosion
Exctinction partielle pour les processus multitypes
PBCM
Couplage des PBCM
Extinction partielle
Conservativité pour les processus multitypes
Conservativité pour les PBCM
Résultats généraux

- On rappelle la définition $\psi^{(n)}(\lambda) = \psi(\lambda + \varepsilon_n) - \psi(\varepsilon_n)$ pour $n \geqslant 0$.
- $\psi^{(n+1)} - \psi^{(n)}$ est encore l'exposant de Laplace d'un subordinateur. Alors, sur un même espace probabilisé, on peut construire $(S^{(n)}, n \geqslant 0)$ une suite indépendante de processus de Lévy d'exposant $\psi^{(n+1)} - \psi^{(n)}$, et $X^{(0)}$ d'exposant $\psi^{(0)}$.
- $X^{(n)} := X(0) + \sum_{k=0}^{n-1} S^{(k)}$ est une suite croissante de processus de Lévy, et $X^{(n)}$ a pour exposant $\psi^{(n)}$.

Théorème

On peut construire un espace probabilisé sur lequel on peut définir une suite croissante $(X^{(n)})$ de processus de Lévy (d'exposant $\psi^{(n)}$), qui converge uniformément sur tout intervalle fermé de $\mathbb{R}_+$, presque sûrement, vers un processus de Lévy X d'exposant de Laplace ψ.

Extinction partielle et conservativité pour les PBCM
Clément Lamoureux
Explosion des processus de branchement continus
PBC
Étude de l'explosion
Exctinction partielle pour les processus multitypes
PBCM
Couplage des PBCM
Extinction partielle
Conservativité pour les processus multitypes
Conservativité pour les PBCM
Résultats généraux

- On rappelle la définition $\psi^{(n)}(\lambda) = \psi(\lambda + \varepsilon_n) - \psi(\varepsilon_n)$ pour $n \geqslant 0$.
- $\psi^{(n+1)} - \psi^{(n)}$ est encore l'exposant de Laplace d'un subordinateur. Alors, sur un même espace probabilisé, on peut construire $(S^{(n)}, n \geqslant 0)$ une suite indépendante de processus de Lévy d'exposant $\psi^{(n+1)} - \psi^{(n)}$, et $X^{(0)}$ d'exposant $\psi^{(0)}$.
- $X^{(n)} := X(0) + \sum_{k=0}^{n-1} S^{(k)}$ est une suite croissante de processus de Lévy, et $X^{(n)}$ a pour exposant $\psi^{(n)}$.

Théorème

On peut construire un espace probabilisé sur lequel on peut définir une suite croissante $(X^{(n)})$ de processus de Lévy (d'exposant $\psi^{(n)}$), qui converge uniformément sur tout intervalle fermé de $\mathbb{R}_+$, presque sûrement, vers un processus de Lévy X d'exposant de Laplace ψ.

Extinction partielle et conservativité pour les PBCM
Clément Lamoureux
Explosion des processus de branchement continus
PBC
Étude de l'explosion
Exctinction partielle pour les processus multitypes
PBCM
Couplage des PBCM
Extinction partielle
Conservativité pour les processus multitypes
Conservativité pour les PBCM
Résultats généraux

Représentation de Lamperti

Soit X un processus de Lévy d'exposant ψ. On définit $\tau = \inf\{t \geqslant 0, X_t \leqslant 0\}$, et $I_t = \inf\{s \geqslant 0, \int_0^s \frac{du}{X_u} > t\}$. Le processus $Z_t = X_{I_t \wedge \tau}$ est un PBC de mécanisme de branchement ψ.

Avec la construction précédente, et la représentation de Lamperti, on peut construire, sur le même espace probabilisé, une suite de processus de branchement $Z^{(n)}$, associé à $X^{(n)}$, ayant donc pour mécanisme de branchement $\psi^{(n)}$.

Extinction partielle et conservativité pour les PBCM
Clément Lamoureux
Explosion des processus de branchement continus
PBC
Étude de l'explosion
Exctinction partielle pour les processus multitypes
PBCM
Couplage des PBCM
Extinction partielle
Conservativité pour les processus multitypes
Conservativité pour les PBCM
Résultats généraux

Représentation de Lamperti

Soit X un processus de Lévy d'exposant ψ. On définit $\tau = \inf\{t \geqslant 0, X_t \leqslant 0\}$, et $I_t = \inf\{s \geqslant 0, \int_0^s \frac{du}{X_u} > t\}$. Le processus $Z_t = X_{I_t \wedge \tau}$ est un PBC de mécanisme de branchement ψ.

Avec la construction précédente, et la représentation de Lamperti, on peut construire, sur le même espace probabilisé, une suite de processus de branchement $Z^{(n)}$, associé à $X^{(n)}$, ayant donc pour mécanisme de branchement $\psi^{(n)}$.

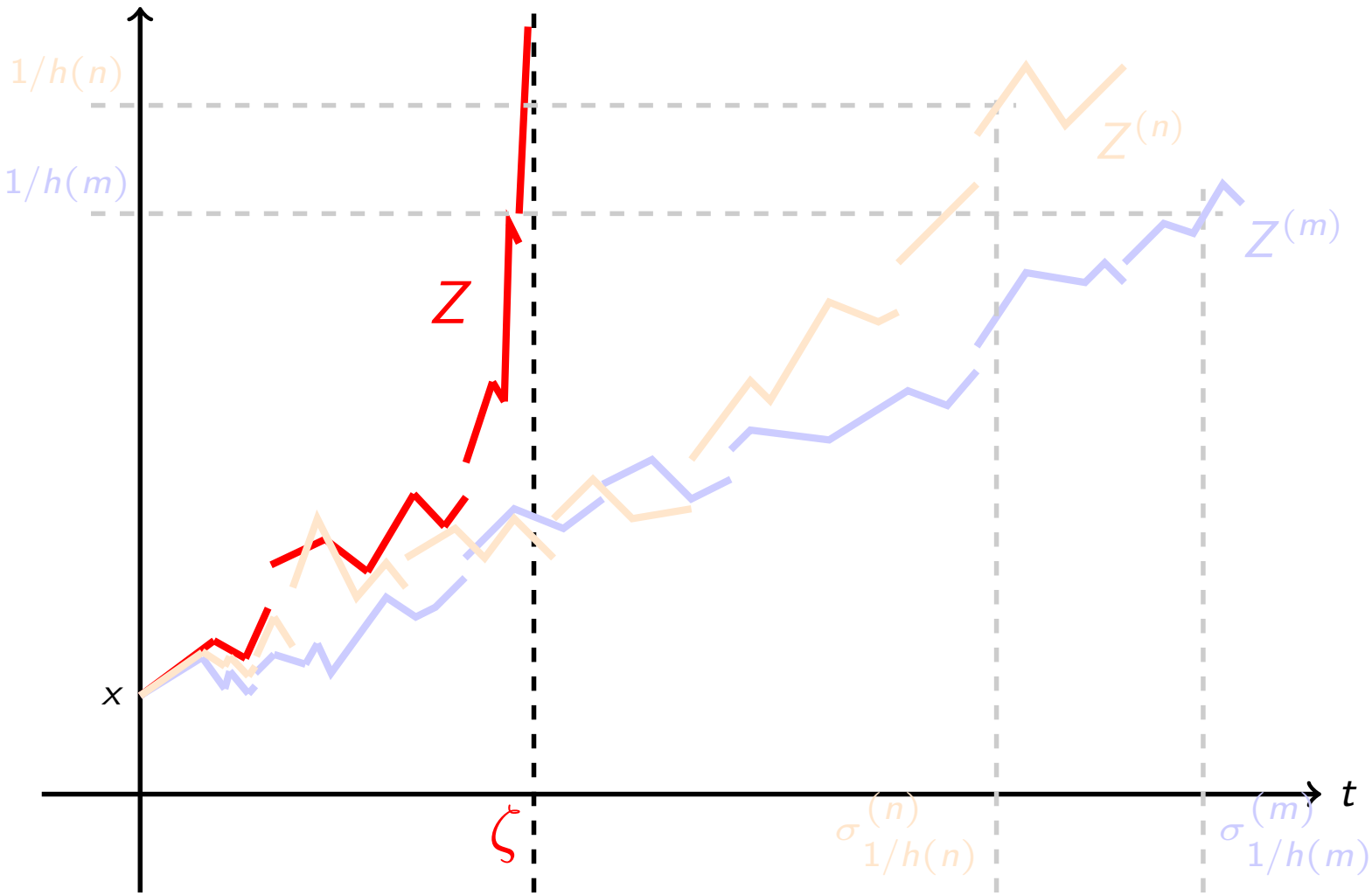
Extinction partielle et conservativité pour les PBCM
Clément Lamoureux
Explosion des processus de branchement continus
PBC
Étude de l'explosion
Exctinction partielle pour les processus multitypes
PBCM
Couplage des PBCM
Extinction partielle
Conservativité pour les processus multitypes
Conservativité pour les PBCM
Résultats généraux

Pour étudier la vitesse d'explosion de Z, on considère une fonction décroissante h définie sur $\mathbb{R}^+$ telle que $\lim_{n\to\infty} h(n) = 0$. On étudie la suite des temps de passage

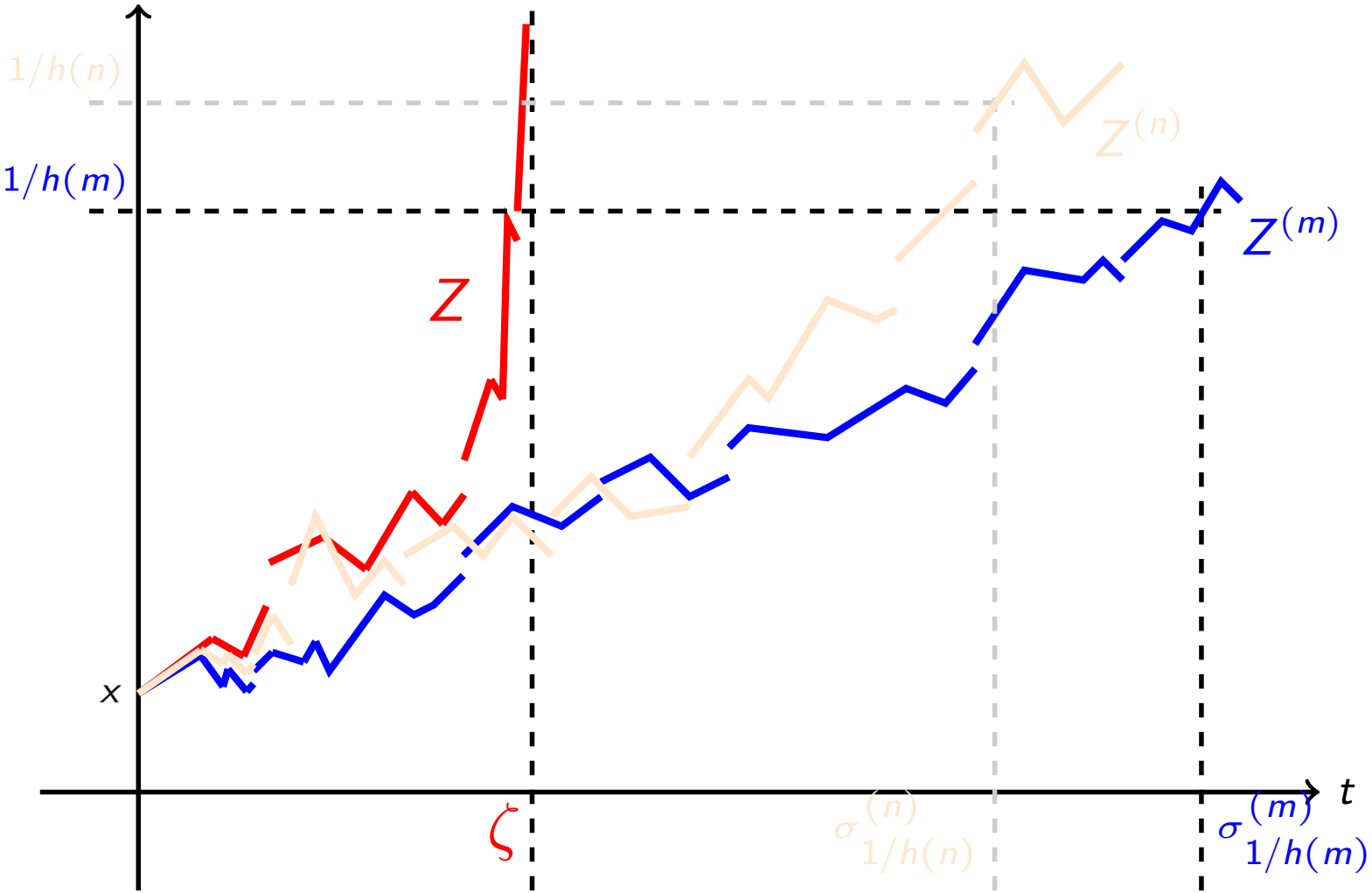
$$\sigma^{(n)}_{1/h(n)} = \inf\left\{t \geqslant 0, Z^{(n)}_t > 1/h(n)\right\}$$

Étude de l'explosion

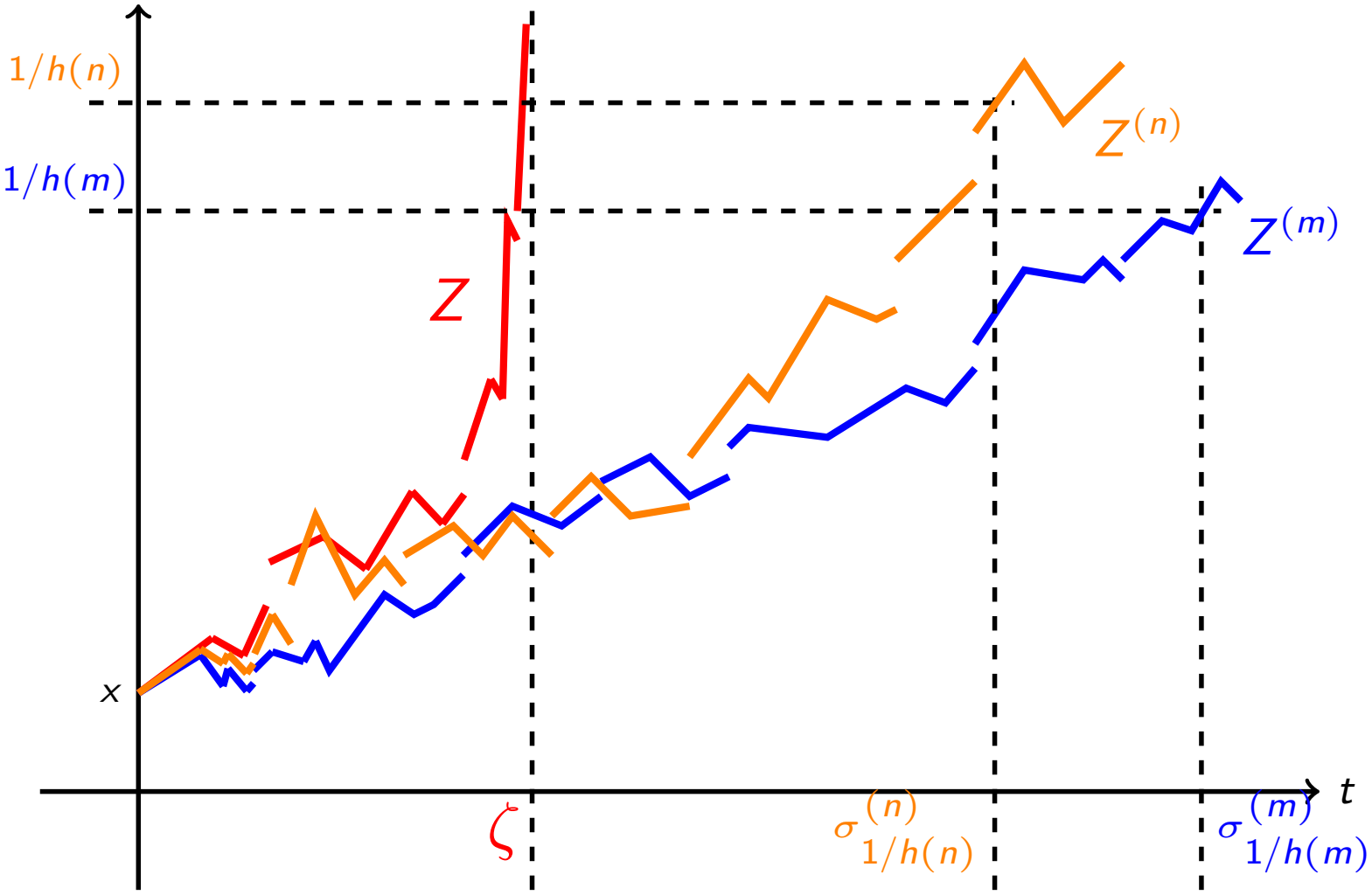
Extinction partielle et conservativité pour les PBCM
Clément Lamoureux
Explosion des processus de branchement continus
PBC
Étude de l'explosion
Exctinction partielle pour les processus multitypes
PBCM
Couplage des PBCM
Extinction partielle
Conservativité pour les processus multitypes
Conservativité pour les PBCM
Résultats généraux



Étude de l'explosion



Étude de l'explosion



Extinction partielle et conservativité pour les PBCM
Clément Lamoureux
Explosion des processus de branchement continus
PBC
Étude de l'explosion
Exctinction partielle pour les processus multitypes
PBCM
Couplage des PBCM
Extinction partielle
Conservativité pour les processus multitypes
Conservativité pour les PBCM
Résultats généraux

Théorème

Il y a équivalence entre les assertions suivantes

- Il existe une variable aléatoire Y à valeurs dans $[0,\infty]$, telle que pour tout $k>0$ et pour tout $x \geqslant 0$, sous $\mathbb{P}_x$, $\sigma^{(n)}_{k/h(n)} \xrightarrow[n\to\infty]{(d)} Y$.
- Pour tout $\theta \in (0,\rho)$, $\lim\limits_{n\to\infty} \int_{h(n)}^{\theta} \frac{du}{-\psi^{(n)}(u)}$ existe.

Lorsque une de ces conditions est vérifiée, pour tout $x \geqslant 0$, sous $\mathbb{P}_x$,

$$Y \overset{(d)}{=} \zeta + c(h) \quad \text{où} \quad \lim_{n\to\infty} \int_{h(n)}^{\theta} \frac{du}{-\psi^{(n)}(u)} = \int_0^{\theta} \frac{du}{-\psi(u)} + c(h).$$

Extinction partielle et conservativité pour les PBCM
Clément Lamoureux
Explosion des processus de branchement continus
PBC
Étude de l'explosion
Exctinction partielle pour les processus multitypes
PBCM
Couplage des PBCM
Extinction partielle
Conservativité pour les processus multitypes
Conservativité pour les PBCM
Résultats généraux

Théorème

Il y a équivalence entre les assertions suivantes

- Il existe une variable aléatoire Y à valeurs dans $[0,\infty]$, telle que pour tout $k>0$ et pour tout $x \geqslant 0$, sous $\mathbb{P}_x$, $\sigma^{(n)}_{k/h(n)} \xrightarrow[n\to\infty]{(d)} Y$.
- Pour tout $\theta \in (0,\rho)$, $\lim\limits_{n\to\infty} \int_{h(n)}^{\theta} \dfrac{du}{-\psi^{(n)}(u)}$ existe.

Lorsque une de ces conditions est vérifiée, pour tout $x \geqslant 0$, sous $\mathbb{P}_x$,

$$Y \overset{(d)}{=} \zeta + c(h) \quad \text{où} \quad \lim_{n\to\infty} \int_{h(n)}^{\theta} \frac{du}{-\psi^{(n)}(u)} = \int_0^{\theta} \frac{du}{-\psi(u)} + c(h).$$

Extinction partielle et conservativité pour les PBCM
Clément Lamoureux
Explosion des processus de branchement continus
PBC
Étude de l'explosion
Exctinction partielle pour les processus multitypes
PBCM
Couplage des PBCM
Extinction partielle
Conservativité pour les processus multitypes
Conservativité pour les PBCM
Résultats généraux

Théorème

Il y a équivalence entre les assertions suivantes

- Il existe une variable aléatoire Y à valeurs dans $[0,\infty]$, telle que pour tout $k>0$ et pour tout $x \geqslant 0$, sous $\mathbb{P}_x$, $\sigma^{(n)}_{k/h(n)} \xrightarrow[n\to\infty]{(d)} Y$.
- Pour tout $\theta \in (0,\rho)$, $\lim\limits_{n\to\infty} \int_{h(n)}^{\theta} \dfrac{du}{-\psi^{(n)}(u)}$ existe.

Lorsque une de ces conditions est vérifiée, pour tout $x \geqslant 0$, sous $\mathbb{P}_x$,

$$Y \overset{(d)}{=} \zeta + c(h) \quad \text{où} \quad \lim_{n\to\infty} \int_{h(n)}^{\theta} \frac{du}{-\psi^{(n)}(u)} = \int_0^{\theta} \frac{du}{-\psi(u)} + c(h).$$

Extinction partielle et conservativité pour les PBCM
Clément Lamoureux
Explosion des processus de branchement continus
PBC
Étude de l'explosion
Exctinction partielle pour les processus multitypes
PBCM
Couplage des PBCM
Extinction partielle
Conservativité pour les processus multitypes
Conservativité pour les PBCM
Résultats généraux

Pour étudier la convergence en loi de la suite $\left(\sigma^{(n)}_{1/h(n)}\right)$, on considère une loi exponentielle e de paramètre 1, et indépendante de X, et $X^{(n)}$. On s'intéresse à

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_x\left(\sigma^{(n)}_{1/h(n)} > t\right) \simeq \mathbb{P}_x\left(\sigma^{(n)}_{\mathrm{e}/h(n)} > t\right) &= \mathbb{P}_x\left(\sup_{s<t} Z^{(n)}_s < \mathrm{e}/h(n)\right)\\ &\simeq \mathbb{P}_x\left(Z^{(n)}_t < \mathrm{e}/h(n)\right)\\ &= \mathbb{E}_x\left(e^{-h(n)Z^{(n)}_t}\right) = e^{-xu^{(n)}_t(h(n))}\end{aligned}$$

Ainsi, la convergence en loi se ramène à étudier pour $t > 0$, $\lim_n u^{(n)}_t(h(n))$, où $u^{(n)}_t(h(n))$ vérifie

$$\int_{h(n)}^{u^{(n)}_t(h(n))} \frac{-du}{\psi^{(n)}(u)} = t$$

Extinction partielle et conservativité pour les PBCM
Clément Lamoureux
Explosion des processus de branchement continus
PBC
Étude de l'explosion
Exctinction partielle pour les processus multitypes
PBCM
Couplage des PBCM
Extinction partielle
Conservativité pour les processus multitypes
Conservativité pour les PBCM
Résultats généraux

Pour étudier la convergence en loi de la suite $\left(\sigma^{(n)}_{1/h(n)}\right)$, on considère une loi exponentielle e de paramètre 1, et indépendante de X, et $X^{(n)}$. On s'intéresse à

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_x\left(\sigma^{(n)}_{1/h(n)} > t\right) \simeq \mathbb{P}_x\left(\sigma^{(n)}_{\mathrm{e}/h(n)} > t\right) &= \mathbb{P}_x\left(\sup_{s<t} Z^{(n)}_s < \mathrm{e}/h(n)\right)\\ &\simeq \mathbb{P}_x\left(Z^{(n)}_t < \mathrm{e}/h(n)\right)\\ &= \mathbb{E}_x\left(e^{-h(n)Z^{(n)}_t}\right) = e^{-xu^{(n)}_t(h(n))}\end{aligned}$$

Ainsi, la convergence en loi se ramène à étudier pour $t > 0$, $\lim_n u^{(n)}_t(h(n))$, où $u^{(n)}_t(h(n))$ vérifie

$$\int_{h(n)}^{u^{(n)}_t(h(n))} \frac{-du}{\psi^{(n)}(u)} = t$$

Extinction partielle et conservativité pour les PBCM
Clément Lamoureux
Explosion des processus de branchement continus
PBC
Étude de l'explosion
Exctinction partielle pour les processus multitypes
PBCM
Couplage des PBCM
Extinction partielle
Conservativité pour les processus multitypes
Conservativité pour les PBCM
Résultats généraux

Cas à variation régulière

Lorsque ψ est à variation régulière (en $0+$) d'indice $\alpha \in (0,1)$, les conditions du théorème précédent sont équivalentes à

$$c = \lim_{n\to\infty} \frac{\log h(n)}{\psi'(\varepsilon_n)} \text{ existe, et } c(h) = c.$$

Extinction partielle et conservativité pour les PBCM
Clément Lamoureux
Explosion des processus de branchement continus
PBC
Étude de l'explosion
Exctinction partielle pour les processus multitypes
PBCM
Couplage des PBCM
Extinction partielle
Conservativité pour les processus multitypes
Conservativité pour les PBCM
Résultats généraux

Théorème

Si pour tout $k > 0$, $\sigma^{(n)}_{k/h(n)} \xrightarrow[n\to\infty]{(d)} \zeta$, alors pour tout $x > 0$ et $n \geqslant 0$, $\sigma^{(n)}_{1/h(n)} \mathbb{1}_{\{\sigma^{(n)}_{1/h(n)} < \infty\}}$ est intégrable sous $\mathbb{P}_x$, et

$$\sigma^{(n)}_{1/h(n)} \mathbb{1}_{\{\sigma^{(n)}_{1/h(n)} < \infty\}} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathrm{L}^1(\mathbb{P}_x)} \zeta \mathbb{1}_{\{\zeta < \infty\}} .$$

Théorème

Si $\sum \psi(\varepsilon_n)/\psi^{(n)}(h(n)) < \infty$, alors pour tout $x > 0$,

$$\sigma^{(n)}_{1/h(n)} \mathbb{1}_{\{\sigma^{(n)}_{1/h(n)} < \infty\}} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{P}_x - a.s.} \zeta \mathbb{1}_{\{\zeta < \infty\}} .$$

Autrement dit, sous les hypothèses du théorème précédent :

$$\int_0^{\tau^{(n)}_{1/h(n)}} \frac{du}{X^{(n)}_u} \mathbb{1}_{\{X^{(n)} \text{ ne touche pas } 0\}} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{P}_x - a.s.} \int_0^{\infty} \frac{du}{X_u} \mathbb{1}_{\{X \text{ ne touche pas } 0\}}$$

Extinction partielle et conservativité pour les PBCM
Clément Lamoureux
Explosion des processus de branchement continus
PBC
Étude de l'explosion
Exctinction partielle pour les processus multitypes
PBCM
Couplage des PBCM
Extinction partielle
Conservativité pour les processus multitypes
Conservativité pour les PBCM
Résultats généraux

Théorème

Si pour tout $k > 0$, $\sigma^{(n)}_{k/h(n)} \xrightarrow[n\to\infty]{(d)} \zeta$, alors pour tout $x > 0$ et $n \geqslant 0$, $\sigma^{(n)}_{1/h(n)} \mathbb{1}_{\{\sigma^{(n)}_{1/h(n)} < \infty\}}$ est intégrable sous $\mathbb{P}_x$, et

$$\sigma^{(n)}_{1/h(n)} \mathbb{1}_{\{\sigma^{(n)}_{1/h(n)} < \infty\}} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathrm{L}^1(\mathbb{P}_x)} \zeta \mathbb{1}_{\{\zeta < \infty\}} .$$

Théorème

Si $\sum \psi(\varepsilon_n)/\psi^{(n)}(h(n)) < \infty$, alors pour tout $x > 0$,

$$\sigma^{(n)}_{1/h(n)} \mathbb{1}_{\{\sigma^{(n)}_{1/h(n)} < \infty\}} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{P}_x - a.s.} \zeta \mathbb{1}_{\{\zeta < \infty\}} .$$

Autrement dit, sous les hypothèses du théorème précédent :

$$\int_0^{\tau^{(n)}_{1/h(n)}} \frac{du}{X^{(n)}_u} \mathbb{1}_{\{X^{(n)} \text{ ne touche pas } 0\}} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{P}_x - a.s.} \int_0^{\infty} \frac{du}{X_u} \mathbb{1}_{\{X \text{ ne touche pas } 0\}}$$

Extinction partielle et conservativité pour les PBCM
Clément Lamoureux
Explosion des processus de branchement continus
PBC
Étude de l'explosion
Exctinction partielle pour les processus multitypes
PBCM
Couplage des PBCM
Extinction partielle
Conservativité pour les processus multitypes
Conservativité pour les PBCM
Résultats généraux

Théorème

Si pour tout $k > 0$, $\sigma^{(n)}_{k/h(n)} \xrightarrow[n\to\infty]{(d)} \zeta$, alors pour tout $x > 0$ et $n \geqslant 0$, $\sigma^{(n)}_{1/h(n)} \mathbb{1}_{\{\sigma^{(n)}_{1/h(n)} < \infty\}}$ est intégrable sous $\mathbb{P}_x$, et

$$\sigma^{(n)}_{1/h(n)} \mathbb{1}_{\{\sigma^{(n)}_{1/h(n)} < \infty\}} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathrm{L}^1(\mathbb{P}_x)} \zeta \mathbb{1}_{\{\zeta < \infty\}} .$$

Théorème

Si $\sum \psi(\varepsilon_n)/\psi^{(n)}(h(n)) < \infty$, alors pour tout $x > 0$,

$$\sigma^{(n)}_{1/h(n)} \mathbb{1}_{\{\sigma^{(n)}_{1/h(n)} < \infty\}} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{P}_x - a.s.} \zeta \mathbb{1}_{\{\zeta < \infty\}} .$$

Autrement dit, sous les hypothèses du théorème précédent :

$$\int_0^{\tau^{(n)}_{1/h(n)}} \frac{du}{X^{(n)}_u} \mathbb{1}_{\{X^{(n)} \text{ ne touche pas } 0\}} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{P}_x - a.s.} \int_0^{\infty} \frac{du}{X_u} \mathbb{1}_{\{X \text{ ne touche pas } 0\}}$$

Extinction partielle et conservativité pour les PBCM

Clément Lamoureux

Explosion des processus de branchement continus

PBC

Étude de l'explosion

Exctinction partielle pour les processus multitypes

PBCM

Couplage des PBCM

Extinction partielle

Conservativité pour les processus multitypes

Conservativité pour les PBCM

Résultats généraux

Exctinction partielle pour les processus multitypes

Table des matières

1 Explosion des processus de branchement continus
- PBC
- Étude de l'explosion

2 Exctinction partielle pour les processus multitypes
- PBCM
- Couplage des PBCM
- Extinction partielle

3 Conservativité pour les processus multitypes
- Conservativité pour les PBCM
- Résultats généraux

Extinction partielle et conservativité pour les PBCM
Clément Lamoureux
Explosion des processus de branchement continus
PBC
Étude de l'explosion
Exctinction partielle pour les processus multitypes
PBCM
Couplage des PBCM
Extinction partielle
Conservativité pour les processus multitypes
Conservativité pour les PBCM
Résultats généraux

Définition

Soit $Z = (Z_t^{(1)}, \dots, Z_t^{(d)})_{t \geqslant 0}$ un processus de Markov à valeurs dans $\mathbb{R}_+^d \cup \{\delta\}$. On dit que Z est un processus de branchement continu multitype si il satisfait

$$\mathbb{E}_{z_1+z_2}[e^{-\langle \lambda, Z_t \rangle}] = \mathbb{E}_{z_1}[e^{-\langle \lambda, Z_t \rangle}]\mathbb{E}_{z_2}[e^{-\langle \lambda, Z_t \rangle}], \ t \geqslant 0, \ z_1, z_2, \lambda \in \mathbb{R}_+^d,$$

Par cette propriété, on peut montrer l'existence d'une fonction $u_t(\lambda)$ qui satisfait

$$\mathbb{E}_z[e^{-\langle \lambda, Z_t \rangle}] = e^{-\langle z, u_t(\lambda) \rangle}, \ t \geqslant 0, \ \lambda, z \in \mathbb{R}_+^d$$

et solution du système d'équations différentielles

$$(S_\psi) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t} u_t^{(i)}(\lambda) = -\psi_i(u_t(\lambda)) \\ u_0^{(i)}(\lambda) = \lambda_i \end{cases}, \quad i \in [d], \ t \geqslant 0$$

Extinction partielle et conservativité pour les PBCM
Clément Lamoureux
Explosion des processus de branchement continus
PBC
Étude de l'explosion
Exctinction partielle pour les processus multitypes
PBCM
Couplage des PBCM
Extinction partielle
Conservativité pour les processus multitypes
Conservativité pour les PBCM
Résultats généraux

Définition

Soit $\mathrm{Z} = (Z_t^{(1)}, \dots, Z_t^{(d)})_{t \geqslant 0}$ un processus de Markov à valeurs dans $\mathbb{R}_+^d \cup \{\delta\}$. On dit que Z est un processus de branchement continu multitype si il satisfait

$$\mathbb{E}_{z_1+z_2}[e^{-\langle \lambda, Z_t \rangle}] = \mathbb{E}_{z_1}[e^{-\langle \lambda, Z_t \rangle}]\mathbb{E}_{z_2}[e^{-\langle \lambda, Z_t \rangle}], \ t \geqslant 0, \ z_1, z_2, \lambda \in \mathbb{R}_+^d,$$

Par cette propriété, on peut montrer l'existence d'une fonction $u_t(\lambda)$ qui satisfait

$$\mathbb{E}_z[e^{-\langle \lambda, Z_t \rangle}] = e^{-\langle z, u_t(\lambda) \rangle}, \ t \geqslant 0, \ \lambda, z \in \mathbb{R}_+^d$$

et solution du système d'équations différentielles

$$(S_\psi) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t} u_t^{(i)}(\lambda) = -\psi_i(u_t(\lambda)) \\ u_0^{(i)}(\lambda) = \lambda_i \end{cases}, \quad i \in [d], \ t \geqslant 0$$

Extinction partielle et conservativité pour les PBCM
Clément Lamoureux
Explosion des processus de branchement continus
PBC
Étude de l'explosion
Exctinction partielle pour les processus multitypes
PBCM
Couplage des PBCM
Extinction partielle
Conservativité pour les processus multitypes
Conservativité pour les PBCM
Résultats généraux

Ici, chaque fonction ψ_i est cette fois-ci l'exposant de Laplace d'un processus de Lévy $\mathrm{X}^{(i)} = {}^t(X^{1,i}, \dots, X^{d,i})$ en dimension d, avec la coordonnée $X^{i,i}$ qui est un processus de Lévy sans sauts négatifs, et $X^{i,j}$, $j \neq i$ sont des subordinateurs. Pour chaque $i \in [d]$,

$$\mathbb{E}[e^{-\langle \lambda, \mathrm{X}_t^{(i)} \rangle}] = e^{t\psi_i(\lambda)}, \quad t \geqslant 0, \quad \lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_d) \in \mathbb{R}_+^d.$$

On note ψ_{ji} l'exposant de Laplace du processus X^{ji} :

$$\psi_{ji}(u) = \psi_i(ue_j).$$

Extinction partielle et conservativité pour les PBCM
Clément Lamoureux
Explosion des processus de branchement continus
PBC
Étude de l'explosion
Exctinction partielle pour les processus multitypes
PBCM
Couplage des PBCM
Extinction partielle
Conservativité pour les processus multitypes
Conservativité pour les PBCM
Résultats généraux

On fait les hypothèses suivantes pour le reste de cette partie :

- La matrice $M = (\mathbb{E}(X_1^{i,j}))_{i,j\in[d]}$ est irréductible.
- L'ensemble $\{\lambda \in \mathbb{R}_+^d : \psi_j(\lambda) > 0, j \in [d]\}$ n'est pas vide.

On note $T = \inf\{t \geqslant 0, Z_t = 0\}$.

Théorème (Chaumont,Marolleau 21)

Pour tout $z \in \mathbb{R}_+^d$, $\mathbb{P}_z(T < \infty) > 0$ si et seulement si

$$\forall i \in [d], \int^{\infty} \frac{du}{\psi_{ii}(u)} < \infty.$$

Extinction partielle et conservativité pour les PBCM
Clément Lamoureux
Explosion des processus de branchement continus
PBC
Étude de l'explosion
Exctinction partielle pour les processus multitypes
PBCM
Couplage des PBCM
Extinction partielle
Conservativité pour les processus multitypes
Conservativité pour les PBCM
Résultats généraux

On fait les hypothèses suivantes pour le reste de cette partie :

- La matrice $M = (\mathbb{E}(X_1^{i,j}))_{i,j\in[d]}$ est irréductible.
- L'ensemble $\{\lambda \in \mathbb{R}_+^d : \psi_j(\lambda) > 0, j \in [d]\}$ n'est pas vide.

On note $T = \inf\{t \geqslant 0, Z_t = 0\}$.

Théorème (Chaumont,Marolleau 21)

Pour tout $z \in \mathbb{R}_+^d$, $\mathbb{P}_z(T < \infty) > 0$ si et seulement si

$$\forall i \in [d], \int^{\infty} \frac{du}{\psi_{ii}(u)} < \infty.$$

Extinction partielle et conservativité pour les PBCM
Clément Lamoureux
Explosion des processus de branchement continus
PBC
Étude de l'explosion
Exctinction partielle pour les processus multitypes
PBCM
Couplage des PBCM
Extinction partielle
Conservativité pour les processus multitypes
Conservativité pour les PBCM
Résultats généraux

On fait les hypothèses suivantes pour le reste de cette partie :

- La matrice $M = (\mathbb{E}(X_1^{i,j}))_{i,j\in[d]}$ est irréductible.
- L'ensemble $\{\lambda \in \mathbb{R}_+^d : \psi_j(\lambda) > 0, j \in [d]\}$ n'est pas vide.

On note $T = \inf\{t \geqslant 0, Z_t = 0\}$.

Théorème (Chaumont,Marolleau 21)

Pour tout $z \in \mathbb{R}_+^d$, $\mathbb{P}_z(T < \infty) > 0$ si et seulement si

$$\forall i \in [d], \int^{\infty} \frac{du}{\psi_{ii}(u)} < \infty.$$

Extinction partielle et conservativité pour les PBCM
Clément Lamoureux
Explosion des processus de branchement continus
PBC
Étude de l'explosion
Exctinction partielle pour les processus multitypes
PBCM
Couplage des PBCM
Extinction partielle
Conservativité pour les processus multitypes
Conservativité pour les PBCM
Résultats généraux

Dans cette partie, on s'intéresse à l'extinction partielle du PBCM. Plus précisément on note

$$T^{(1)} = \inf\{t \geqslant 0, Z_t^{(1)} = 0\},$$

et on se demande sous quelle condition portant sur le mécanisme de branchement ψ de Z on peut avoir :

$$\mathbb{P}_z(T^{(1)} < T) > 0.$$

Extinction partielle et conservativité pour les PBCM
Clément Lamoureux
Explosion des processus de branchement continus
PBC
Étude de l'explosion
Exctinction partielle pour les processus multitypes
PBCM
Couplage des PBCM
Extinction partielle
Conservativité pour les processus multitypes
Conservativité pour les PBCM
Résultats généraux

Une première réponse dans ce sens, qui vient compléter le théorème précédent sur l'extinction des PBCM, est donnée par le théorème suivant

Théorème (Friesen, Jin, Rudiger 21)

Si $\mathbb{P}_z(T^{(1)} < \infty) > 0$, alors il existe $\theta > 0$, tel que $\psi_{11}(u) > 0$ pour tout $u > \theta$, et

$$\int^{\infty} \frac{du}{\psi_{11}(u)} < \infty.$$

Nous supposons donc maintenant que les hypothèses du théorème précédent sont satisfaites.

Table des matières

1 Explosion des processus de branchement continus
- PBC
- Étude de l'explosion

2 Exctinction partielle pour les processus multitypes
- PBCM
- Couplage des PBCM
- Extinction partielle

3 Conservativité pour les processus multitypes
- Conservativité pour les PBCM
- Résultats généraux

Extinction partielle et conservativité pour les PBCM
Clément Lamoureux
Explosion des processus de branchement continus
PBC
Étude de l'explosion
Exctinction partielle pour les processus multitypes
PBCM
Couplage des PBCM
Extinction partielle
Conservativité pour les processus multitypes
Conservativité pour les PBCM
Résultats généraux

Pour donner une idée d'où vient le couplage que nous utilisons, on présente la version discrète de ce dernier. Soit $\mathrm{Z} = (\mathrm{Z}_n)_{n\in\mathbb{Z}_+}$ un processus de branchement multitype discret. On peut définir ce processus par récurrence avec la formule

$$\mathrm{Z}_{n+1} = \sum_{j=1}^{d} \sum_{k=1}^{Z_n^{(j)}} \mathrm{X}_{k,n}^{(j)}, \quad n \geqslant 0, \tag{1}$$

où les variables aléatoires $\{X_{k,n}^{(i)}, i \in [d],\ k, n \in \mathbb{Z}_+\}$ sont indépendantes, et pour tout $i \in [d]$, $k, n \in \mathbb{Z}_+$, $\mathrm{X}_{k,n}^{(i)} = (X_{k,n}^{i,1}, \ldots, X_{k,n}^{i,d})$ sont distribuées selon une même mesure de probabilité sur $\mathbb{Z}_+^d$, qui dépend seulement de i.

Extinction partielle et conservativité pour les PBCM
Clément Lamoureux
Explosion des processus de branchement continus
PBC
Étude de l'explosion
Exctinction partielle pour les processus multitypes
PBCM
Couplage des PBCM
Extinction partielle
Conservativité pour les processus multitypes
Conservativité pour les PBCM
Résultats généraux

Pour $b = (b_2, \dots, b_d) \in \mathbb{N}^{d-1}$, si pour tout $i \in \{2, \dots, d\}$, $Z_0^{(i)} \leqslant b_i$, alors en utilisant la relation de récurrence pour les PBCMD

$$\begin{aligned} Z_1^{(1)} &= \sum_{k=1}^{Z_0^{(1)}} X_{k,0}^{1,1} + \sum_{k=1}^{Z_0^{(2)}} X_{k,0}^{1,2} + \cdots + \sum_{k=1}^{Z_0^{(d)}} X_{k,0}^{1,d} \\ &\leqslant \sum_{k=1}^{Z_0^{(1)}} X_{k,0}^{1,1} + \sum_{k=1}^{b_2} X_{k,0}^{1,2} + \cdots + \sum_{k=1}^{b_d} X_{k,0}^{1,d} \\ &\leqslant \sum_{k=1}^{Z_0^{(1)}} X_{k,0}^{1,1} + \xi^{(0)}(b). \end{aligned}$$

Ainsi, si $Z_n^{(i)} \leqslant b_i$ pour tout $n \leqslant N$, on montre par récurrence que $Z_n^{(1)} \leqslant \overline{Y}_n^b$, où

$$\overline{Y}_{n+1}^b = \sum_{k=1}^{\overline{Y}_n^b} X_{k,n}^{1,1} + \xi^{(n)}(b).$$

Extinction partielle et conservativité pour les PBCM
Clément Lamoureux
Explosion des processus de branchement continus
PBC
Étude de l'explosion
Exctinction partielle pour les processus multitypes
PBCM
Couplage des PBCM
Extinction partielle
Conservativité pour les processus multitypes
Conservativité pour les PBCM
Résultats généraux

Pour $b = (b_2, \dots, b_d) \in \mathbb{N}^{d-1}$, si pour tout $i \in \{2, \dots, d\}$, $Z_0^{(i)} \leqslant b_i$, alors en utilisant la relation de récurrence pour les PBCMD

$$\begin{aligned} Z_1^{(1)} &= \sum_{k=1}^{Z_0^{(1)}} X_{k,0}^{1,1} + \sum_{k=1}^{Z_0^{(2)}} X_{k,0}^{1,2} + \cdots + \sum_{k=1}^{Z_0^{(d)}} X_{k,0}^{1,d} \\ &\leqslant \sum_{k=1}^{Z_0^{(1)}} X_{k,0}^{1,1} + \sum_{k=1}^{b_2} X_{k,0}^{1,2} + \cdots + \sum_{k=1}^{b_d} X_{k,0}^{1,d} \\ &\leqslant \sum_{k=1}^{Z_0^{(1)}} X_{k,0}^{1,1} + \xi^{(0)}(b). \end{aligned}$$

Ainsi, si $Z_n^{(i)} \leqslant b_i$ pour tout $n \leqslant N$, on montre par récurrence que $Z_n^{(1)} \leqslant \overline{Y}_n^b$, où

$$\overline{Y}_{n+1}^b = \sum_{k=1}^{\overline{Y}_n^b} X_{k,n}^{1,1} + \xi^{(n)}(b).$$

Extinction partielle et conservativité pour les PBCM
Clément Lamoureux
Explosion des processus de branchement continus
PBC
Étude de l'explosion
Exctinction partielle pour les processus multitypes
PBCM
Couplage des PBCM
Extinction partielle
Conservativité pour les processus multitypes
Conservativité pour les PBCM
Résultats généraux

Dans l'écriture précédente, $\xi^{(n)}(b)$ est une somme de variables aléatoires positives indépendantes des $(X_{k,n}^{11}, k, n \in \mathbb{N})$ avec

$$\xi^{(n)}(b) = \sum_{k=1}^{b_2} X_{k,n}^{1,2} + \cdots + \sum_{k=1}^{b_d} X_{k,n}^{1,d},$$

et ainsi le processus $\overline{Y}^b$ est un processus de branchement avec immigration discret qui vérifie

$$Z_n^{(1)} \leqslant \overline{Y}_n^b, \ \forall n \leqslant \inf\left\{k \geqslant 0, (Z_n^{(2)}, \ldots, Z_n^{(d)}) \notin [0, b_2] \times \cdots \times [0, b_d]\right\}.$$

Pour obtenir un résultat similaire dans le cas continu, on adapte le même raisonnement sur les EDS qui définissent les PBCM.

Extinction partielle et conservativité pour les PBCM
Clément Lamoureux
Explosion des processus de branchement continus
PBC
Étude de l'explosion
Exctinction partielle pour les processus multitypes
PBCM
Couplage des PBCM
Extinction partielle
Conservativité pour les processus multitypes
Conservativité pour les PBCM
Résultats généraux

Dans l'écriture précédente, $\xi^{(n)}(b)$ est une somme de variables aléatoires positives indépendantes des $(X_{k,n}^{11}, k, n \in \mathbb{N})$ avec

$$\xi^{(n)}(b) = \sum_{k=1}^{b_2} X_{k,n}^{1,2} + \cdots + \sum_{k=1}^{b_d} X_{k,n}^{1,d},$$

et ainsi le processus $\overline{Y}^b$ est un processus de branchement avec immigration discret qui vérifie

$$Z_n^{(1)} \leqslant \overline{Y}_n^b, \ \forall n \leqslant \inf\left\{k \geqslant 0, (Z_n^{(2)}, \ldots, Z_n^{(d)}) \notin [0, b_2] \times \cdots \times [0, b_d]\right\}.$$

Pour obtenir un résultat similaire dans le cas continu, on adapte le même raisonnement sur les EDS qui définissent les PBCM.

Extinction partielle et conservativité pour les PBCM
Clément Lamoureux
Explosion des processus de branchement continus
PBC
Étude de l'explosion
Exctinction partielle pour les processus multitypes
PBCM
Couplage des PBCM
Extinction partielle
Conservativité pour les processus multitypes
Conservativité pour les PBCM
Résultats généraux

On note pour $a = (a_2, ..., a_d)$, $b = (b_2, ..., b_d) \in (0, \infty)^{d-1}$,

$$\underline{\sigma}_a = \inf\left\{t \geqslant 0, \left(Z_t^{(2)}, \dots, Z_t^{(d)}\right) \notin (a_2, \infty) \times \cdots \times (a_d, \infty)\right\},$$
$$\overline{\sigma}^b = \inf\left\{t \geqslant 0, \left(Z_t^{(2)}, \dots, Z_t^{(d)}\right) \notin [0, b_2) \times \cdots \times [0, b_d)\right\}.$$

Théorème

Soient $a = (a_2, ..., a_d)$, $b = (b_2, ..., b_d) \in (0, \infty)^{d-1}$ et soit $\mathbb{Z}$ un PBCM de mécanisme ψ, issu de $z_0 = (z_0^{(1)}, \dots, z_0^{(d)}) \in \mathbb{R}^d \backslash \{0\}$.

1. Il existe un PBCI, $\overline{Y}^b$, de mécanisme $(\psi_{11}, \sum_{j=2}^d b_j \psi_{1j})$ issu de $z_0^{(1)}$ tel que pour tout $t \leqslant \overline{\sigma}^b$, $Z_t^{(1)} \leqslant \overline{Y}_t^b$, p.s.
2. Il existe un PBCI, $\underline{Y}^a$, de mécanisme $(\psi_{11}, \sum_{j=2}^d a_j \psi_{1j})$ issu de $z_0^{(1)}$ tel que pour tout $t \leqslant \underline{\sigma}_a$, $\underline{Y}_t^a \leqslant Z_t^{(1)}$ p.s.

Table des matières

1 Explosion des processus de branchement continus
- PBC
- Étude de l'explosion

2 Exctinction partielle pour les processus multitypes
- PBCM
- Couplage des PBCM
- Extinction partielle

3 Conservativité pour les processus multitypes
- Conservativité pour les PBCM
- Résultats généraux

Extinction partielle et conservativité pour les PBCM
Clément Lamoureux
Explosion des processus de branchement continus
PBC
Étude de l'explosion
Exctinction partielle pour les processus multitypes
PBCM
Couplage des PBCM
Extinction partielle
Conservativité pour les processus multitypes
Conservativité pour les PBCM
Résultats généraux

L'intérêt de la construction précédente est de ramener l'étude à celle des 0 pour les PBCI, en une dimension, pour laquelle on dispose du résultat suivant

Théorème (Foucart, Uribe-Bravo 14)

Soit Y un PBCI(ψ, ϕ). On suppose que ψ vérifie la condition de Grey : il existe $\theta > 0$ tel que $\psi(s) > 0$ pour tout $s \geqslant \theta$ et $\int_\theta^\infty 1/\psi(s)\mathrm{d}s < \infty$. Alors Y atteint 0 avec probabilité positive si et seulement si

$$\int_\theta^\infty \frac{\mathrm{d}\lambda}{\psi(\lambda)} \exp\left[\int_\theta^\lambda \frac{\phi(z)}{\psi(z)}\mathrm{d}z\right] < \infty.$$

Extinction partielle et conservativité pour les PBCM
Clément Lamoureux
Explosion des processus de branchement continus
PBC
Étude de l'explosion
Exctinction partielle pour les processus multitypes
PBCM
Couplage des PBCM
Extinction partielle
Conservativité pour les processus multitypes
Conservativité pour les PBCM
Résultats généraux

Théorème

Soit $\theta > \sup\{\lambda \geqslant 0, \psi_{11}(\lambda) \leqslant 0\}$. On définit

$$\mathcal{C} = \overline{\left\{(c_2, \dots, c_d) \in \mathbb{R}_+^{d-1} : \int_\theta^\infty \frac{\mathrm{d}\lambda}{\psi_{11}(\lambda)} \exp\left[\int_\theta^\lambda \frac{-\sum_{k=2}^d c_k \psi_{1k}(z)}{\psi_{11}(z)} \mathrm{d}z\right] < \infty\right\}}.$$

Alors,

(i) pour tout $\mathrm{z} = (z_1, \dots, z_d) \in \mathbb{R}_+^d$ avec $z_1 > 0$,

$$\mathbb{P}_\mathrm{z}\left(\exists t \geqslant 0, \mathrm{Z}_t \in \{0\} \times \mathcal{C}^c\right) = 0.$$

(ii) Si il existe $c = (c_2, \dots, c_d) \in \mathcal{C}$ tel que $c_i > 0$, pour tout $i \in [d]$, alors pour tout $\mathrm{z} \in \mathbb{R}_+^d \backslash \{0\}$,

$$\mathbb{P}_\mathrm{z}\left(T^{(1)} < T\right) > 0, \quad \text{pour tout } \mathrm{z} \in \mathbb{R}^d \backslash \{0\}.$$

Extinction partielle et conservativité pour les PBCM
Clément Lamoureux
Explosion des processus de branchement continus
PBC
Étude de l'explosion
Exctinction partielle pour les processus multitypes
PBCM
Couplage des PBCM
Extinction partielle
Conservativité pour les processus multitypes
Conservativité pour les PBCM
Résultats généraux

- **Cas $d = 2$:** l'ensemble $\mathcal{C}$ est un intervalle fermé et l'extinction partielle est possible si et seulement si $\mathcal{C} \neq \{0\}$.
- **Cas $d > 2$:** Si par exemple l'ensemble $\mathcal{C} = \{0\} \times \mathbb{R}_+^{d-2}$, on ne peut pas savoir si l'ensemble l'extinction partielle est possible. Néanmoins, si elle l'est, alors $Z^{(1)}_{T^{(1)}} = Z^{(2)}_{T^{(1)}} = 0$.
  En effet en utilisant le point (i) du théorème précédent,

$$\mathbb{P}_z\left(\exists t \geqslant 0, Z_t \in \{0\} \times \mathcal{C}^c\right) = \mathbb{P}_z\left(\exists t \geqslant 0, Z_t \in \{0\} \times (0,\infty) \times \mathbb{R}_+^{d-2}\right) = 0.$$

Extinction partielle et conservativité pour les PBCM
Clément Lamoureux
Explosion des processus de branchement continus
PBC
Étude de l'explosion
Exctinction partielle pour les processus multitypes
PBCM
Couplage des PBCM
Extinction partielle
Conservativité pour les processus multitypes
Conservativité pour les PBCM
Résultats généraux

- **Cas $d = 2$:** l'ensemble $\mathcal{C}$ est un intervalle fermé et l'extinction partielle est possible si et seulement si $\mathcal{C} \neq \{0\}$.
- **Cas $d > 2$:** Si par exemple l'ensemble $\mathcal{C} = \{0\} \times \mathbb{R}_+^{d-2}$, on ne peut pas savoir si l'ensemble l'extinction partielle est possible. Néanmoins, si elle l'est, alors $Z^{(1)}_{T^{(1)}} = Z^{(2)}_{T^{(1)}} = 0$.
  En effet en utilisant le point (i) du théorème précédent,

$$\mathbb{P}_z\left(\exists t \geqslant 0, Z_t \in \{0\} \times \mathcal{C}^c\right) = \mathbb{P}_z\left(\exists t \geqslant 0, Z_t \in \{0\} \times (0,\infty) \times \mathbb{R}_+^{d-2}\right) = 0.$$

Conservativité pour les processus multitypes

Table des matières

1 Explosion des processus de branchement continus
- PBC
- Étude de l'explosion

2 Exctinction partielle pour les processus multitypes
- PBCM
- Couplage des PBCM
- Extinction partielle

3 Conservativité pour les processus multitypes
- Conservativité pour les PBCM
- Résultats généraux

Extinction partielle et conservativité pour les PBCM
Clément Lamoureux
Explosion des processus de branchement continus
PBC
Étude de l'explosion
Exctinction partielle pour les processus multitypes
PBCM
Couplage des PBCM
Extinction partielle
Conservativité pour les processus multitypes
Conservativité pour les PBCM
Résultats généraux

On considère Z un processus de branchement multitype de mécanisme ψ. On rappelle que l'exposant de Laplace de Z est solution de

$$(S_\psi) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t} u_t^{(i)}(\lambda) = -\psi_i(\mathrm{u}_t(\lambda)) \\ u_0^{(i)}(\lambda) = \lambda_i \end{cases}, \quad i \in [d],\ t \geqslant 0.$$

Définition

On dit que Z est conservatif si pour tout $\mathrm{z} \in \mathbb{R}_+^d$ et pour tout $t \geqslant 0$, $\mathbb{P}_\mathrm{z}(Z_t \in \mathbb{R}_+^d) = 1$.

En utilisant la relation $\mathbb{E}_\mathrm{z}\left(e^{-\langle \lambda, \mathrm{Z}_t\rangle}\right) = e^{-\langle \mathrm{z}, u_t(\lambda)\rangle}$,

$$Z \text{ est conservatif} \iff \mathbb{P}_\mathrm{z}(Z_t \in \mathbb{R}_+^d) = 1 \iff \forall t \geqslant 0,\ u_t(0) := \lim_{\lambda \to 0} u_t(\lambda) = 0$$

et caractériser la conservativité revient à caractériser les fonctions ψ telles que la solution de (S_ψ) vérifie $u_t(0) = 0$. Dans le cas $d = 1$, ce système se résout, et on trouve la condition de Grey en 0 : Z est conservatif si et seulement si

$$\int_{0+} \frac{du}{|\psi(u)|} = \infty.$$

Extinction partielle et conservativité pour les PBCM
Clément Lamoureux
Explosion des processus de branchement continus
PBC
Étude de l'explosion
Exctinction partielle pour les processus multitypes
PBCM
Couplage des PBCM
Extinction partielle
Conservativité pour les processus multitypes
Conservativité pour les PBCM
Résultats généraux

On considère Z un processus de branchement multitype de mécanisme ψ. On rappelle que l'exposant de Laplace de Z est solution de

$$(S_\psi) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t} u_t^{(i)}(\lambda) = -\psi_i(\mathrm{u}_t(\lambda)) \\ u_0^{(i)}(\lambda) = \lambda_i \end{cases}, \quad i \in [d],\ t \geqslant 0.$$

Définition

On dit que Z est conservatif si pour tout $\mathrm{z} \in \mathbb{R}_+^d$ et pour tout $t \geqslant 0$, $\mathbb{P}_\mathrm{z}(Z_t \in \mathbb{R}_+^d) = 1$.

En utilisant la relation $\mathbb{E}_\mathrm{z}\left(e^{-\langle \lambda, \mathrm{Z}_t\rangle}\right) = e^{-\langle \mathrm{z}, u_t(\lambda)\rangle}$,

$$Z \text{ est conservatif} \iff \mathbb{P}_\mathrm{z}(Z_t \in \mathbb{R}_+^d) = 1 \iff \forall t \geqslant 0,\ u_t(0) := \lim_{\lambda \to 0} u_t(\lambda) = 0$$

et caractériser la conservativité revient à caractériser les fonctions ψ telles que la solution de (S_ψ) vérifie $u_t(0) = 0$. Dans le cas $d = 1$, ce système se résout, et on trouve la condition de Grey en 0 : Z est conservatif si et seulement si

$$\int_{0+} \frac{du}{|\psi(u)|} = \infty.$$

Extinction partielle et conservativité pour les PBCM
Clément Lamoureux
Explosion des processus de branchement continus
PBC
Étude de l'explosion
Exctinction partielle pour les processus multitypes
PBCM
Couplage des PBCM
Extinction partielle
Conservativité pour les processus multitypes
Conservativité pour les PBCM
Résultats généraux

On considère Z un processus de branchement multitype de mécanisme ψ. On rappelle que l'exposant de Laplace de Z est solution de

$$(S_\psi) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t} u_t^{(i)}(\lambda) = -\psi_i(\mathrm{u}_t(\lambda)) \\ u_0^{(i)}(\lambda) = \lambda_i \end{cases}, \quad i \in [d],\ t \geqslant 0.$$

Définition

On dit que Z est conservatif si pour tout $\mathrm{z} \in \mathbb{R}_+^d$ et pour tout $t \geqslant 0$, $\mathbb{P}_\mathrm{z}(Z_t \in \mathbb{R}_+^d) = 1$.

En utilisant la relation $\mathbb{E}_\mathrm{z}\left(e^{-\langle \lambda, \mathrm{Z}_t\rangle}\right) = e^{-\langle \mathrm{z}, u_t(\lambda)\rangle}$,

$$Z \text{ est conservatif} \iff \mathbb{P}_\mathrm{z}(Z_t \in \mathbb{R}_+^d) = 1 \iff \forall t \geqslant 0,\ u_t(0) := \lim_{\lambda \to 0} u_t(\lambda) = 0$$

et caractériser la conservativité revient à caractériser les fonctions ψ telles que la solution de (S_ψ) vérifie $u_t(0) = 0$. Dans le cas $d = 1$, ce système se résout, et on trouve la condition de Grey en 0 : Z est conservatif si et seulement si

$$\int_{0+} \frac{du}{|\psi(u)|} = \infty.$$

Extinction partielle et conservativité pour les PBCM
Clément Lamoureux
Explosion des processus de branchement continus
PBC
Étude de l'explosion
Exctinction partielle pour les processus multitypes
PBCM
Couplage des PBCM
Extinction partielle
Conservativité pour les processus multitypes
Conservativité pour les PBCM
Résultats généraux

On considère le processus de branchement $\mathbb{Z}$ en dimension $d = 2$, avec $-\psi_1(\lambda_1, \lambda_2) = \phi_1(\lambda_2)$ et $-\psi_2(\lambda_1, \lambda_2) = \phi_2(\lambda_1)$. Dans ce cas, le système (S_ψ) devient

$$(S_\psi) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t} u_t^{(1)}(\lambda) = \phi_1(u_t^{(2)}(\lambda)) \\ \dfrac{\partial}{\partial t} u_t^{(2)}(\lambda) = \phi_2(u_t^{(1)}(\lambda)) \\ u_0^{(1)}(\lambda) = \lambda_1, \ u_0^{(2)}(\lambda) = \lambda_2 \end{cases} , \quad t \geqslant 0.$$

On peut résoudre ce système analytiquement, et trouver une condition de type Grey pour la conservativité :

Proposition

$$\forall t \geqslant 0, \ u_t(0) = 0 \iff \int_{0+} \frac{du}{\phi_2(I_2^{-1}(u))\phi_1(I_1^{-1}(u))} = \infty$$

où $I_i(t) = \int_0^t \phi_1(u)du$, et I_i^{-1} est sa réciproque.

Extinction partielle et conservativité pour les PBCM
Clément Lamoureux
Explosion des processus de branchement continus
PBC
Étude de l'explosion
Exctinction partielle pour les processus multitypes
PBCM
Couplage des PBCM
Extinction partielle
Conservativité pour les processus multitypes
Conservativité pour les PBCM
Résultats généraux

On considère le processus de branchement $\mathbb{Z}$ en dimension $d = 2$, avec $-\psi_1(\lambda_1, \lambda_2) = \phi_1(\lambda_2)$ et $-\psi_2(\lambda_1, \lambda_2) = \phi_2(\lambda_1)$. Dans ce cas, le système (S_ψ) devient

$$(S_\psi) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t} u_t^{(1)}(\lambda) = \phi_1(u_t^{(2)}(\lambda)) \\ \dfrac{\partial}{\partial t} u_t^{(2)}(\lambda) = \phi_2(u_t^{(1)}(\lambda)) \\ u_0^{(1)}(\lambda) = \lambda_1, \ u_0^{(2)}(\lambda) = \lambda_2 \end{cases} , \quad t \geqslant 0.$$

On peut résoudre ce système analytiquement, et trouver une condition de type Grey pour la conservativité :

Proposition

$$\forall t \geqslant 0, \ u_t(0) = 0 \iff \int_{0+} \frac{du}{\phi_2(I_2^{-1}(u))\phi_1(I_1^{-1}(u))} = \infty$$

où $I_i(t) = \int_0^t \phi_1(u)du$, et I_i^{-1} est sa réciproque.

Exemple (Subordinateurs α-stables)

Si les processus de Lévy associés à Z sont des subordinateurs $\alpha-$stables ou des drifts, avec $\phi_i(\lambda) = b_i\lambda^{\alpha_i}$, $\alpha_i \in (0,1]$, $b_1 > 0$ pour $i = 1,2$, alors le processus est conservatif si et seulement si

$$\int_{0+} \frac{du}{u^{\alpha_1/(\alpha_1+1)+\alpha_2/(\alpha_2+1)}} = \infty$$

c'est à dire si et seulement si $\alpha_1\alpha_2 \geqslant 1$ et donc $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$.

Exemple ($\phi_1 = \phi_2$)

Si $\phi_1 = \phi_2$, on retrouve la même condition qu'en une dimension : le processus est conservatif si et seulement si

$$\int_{0+} \frac{du}{\phi_1(u)} = \infty.$$

Exemple (Subordinateurs α-stables)

Si les processus de Lévy associés à Z sont des subordinateurs $\alpha-$stables ou des drifts, avec $\phi_i(\lambda) = b_i\lambda^{\alpha_i}$, $\alpha_i \in (0,1]$, $b_1 > 0$ pour $i = 1,2$, alors le processus est conservatif si et seulement si

$$\int_{0+} \frac{du}{u^{\alpha_1/(\alpha_1+1)+\alpha_2/(\alpha_2+1)}} = \infty$$

c'est à dire si et seulement si $\alpha_1\alpha_2 \geqslant 1$ et donc $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$.

Exemple ($\phi_1 = \phi_2$)

Si $\phi_1 = \phi_2$, on retrouve la même condition qu'en une dimension : le processus est conservatif si et seulement si

$$\int_{0+} \frac{du}{\phi_1(u)} = \infty.$$

Table des matières

1 Explosion des processus de branchement continus
- PBC
- Étude de l'explosion

2 Exctinction partielle pour les processus multitypes
- PBCM
- Couplage des PBCM
- Extinction partielle

3 Conservativité pour les processus multitypes
- Conservativité pour les PBCM
- Résultats généraux

Extinction partielle et conservativité pour les PBCM
Clément Lamoureux
Explosion des processus de branchement continus
PBC
Étude de l'explosion
Exctinction partielle pour les processus multitypes
PBCM
Couplage des PBCM
Extinction partielle
Conservativité pour les processus multitypes
Conservativité pour les PBCM
Résultats généraux

L'idée pour étudier la conservativité est de ramener l'étude à celle de système en une dimension. Pour une fonction g, on note $v_t^g(\lambda)$ la solution du système

$$(S_g) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t} v_t^g(\lambda) = -g(v_t^g(\lambda)) \\ v_0^g(\lambda) = \lambda \end{cases}, \quad t \geqslant 0.$$

Lorsque g est assez régulière, la condition de Grey est toujours valide pour v^g, c'est-à-dire $v_t^g(0) = 0$ pour tout $t \geqslant 0$ si et seulement si

$$\int_{0+} \frac{du}{|g(u)|} = \infty.$$

On note $\Delta = \{(\lambda, \ldots, \lambda), \lambda > 0\}$ la diagonale de $(0, \infty)^d$. Pour $i \in [d]$, et $\lambda > 0$, on note

$$\widetilde{\psi}_i = \psi_i(\lambda, \ldots, \lambda).$$

Extinction partielle et conservativité pour les PBCM
Clément Lamoureux
Explosion des processus de branchement continus
PBC
Étude de l'explosion
Exctinction partielle pour les processus multitypes
PBCM
Couplage des PBCM
Extinction partielle
Conservativité pour les processus multitypes
Conservativité pour les PBCM
Résultats généraux

L'idée pour étudier la conservativité est de ramener l'étude à celle de système en une dimension. Pour une fonction g, on note $v_t^g(\lambda)$ la solution du système

$$(S_g) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t} v_t^g(\lambda) = -g(v_t^g(\lambda)) \\ v_0^g(\lambda) = \lambda \end{cases}, \quad t \geqslant 0.$$

Lorsque g est assez régulière, la condition de Grey est toujours valide pour v^g, c'est-à-dire $v_t^g(0) = 0$ pour tout $t \geqslant 0$ si et seulement si

$$\int_{0+} \frac{du}{|g(u)|} = \infty.$$

On note $\Delta = \{(\lambda, \dots, \lambda), \lambda > 0\}$ la diagonale de $(0, \infty)^d$. Pour $i \in [d]$, et $\lambda > 0$, on note

$$\widetilde{\psi}_i = \psi_i(\lambda, \dots, \lambda).$$

Extinction partielle et conservativité pour les PBCM
Clément Lamoureux
Explosion des processus de branchement continus
PBC
Étude de l'explosion
Exctinction partielle pour les processus multitypes
PBCM
Couplage des PBCM
Extinction partielle
Conservativité pour les processus multitypes
Conservativité pour les PBCM
Résultats généraux

L'idée pour étudier la conservativité est de ramener l'étude à celle de système en une dimension. Pour une fonction g, on note $v_t^g(\lambda)$ la solution du système

$$(S_g) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t} v_t^g(\lambda) = -g(v_t^g(\lambda)) \\ v_0^g(\lambda) = \lambda \end{cases}, \quad t \geqslant 0.$$

Lorsque g est assez régulière, la condition de Grey est toujours valide pour v^g, c'est-à-dire $v_t^g(0) = 0$ pour tout $t \geqslant 0$ si et seulement si

$$\int_{0+} \frac{du}{|g(u)|} = \infty.$$

On note $\Delta = \{(\lambda, \ldots, \lambda), \lambda > 0\}$ la diagonale de $(0, \infty)^d$. Pour $i \in [d]$, et $\lambda > 0$, on note

$$\widetilde{\psi}_i = \psi_i(\lambda, \ldots, \lambda).$$

Extinction partielle et conservativité pour les PBCM
Clément Lamoureux
Explosion des processus de branchement continus
PBC
Étude de l'explosion
Exctinction partielle pour les processus multitypes
PBCM
Couplage des PBCM
Extinction partielle
Conservativité pour les processus multitypes
Conservativité pour les PBCM
Résultats généraux

Proposition

Si g, h sont des fonctions assez régulières, telles que pour tous $x > 0$ et $i \in [d]$,

$$h(x) < \widetilde{\psi}_i(x) < g(x),$$

alors, pour tous $t \geqslant 0$, $i \in [d]$, et $\lambda \in \Delta$

$$v_t^g(\lambda_1) \leqslant u_t^{(i)}(\boldsymbol{\lambda}) \leqslant v_t^h(\lambda_1).$$

En particulier, pour $t > 0$ et $i \in [d]$,

$$v_t^g(0) \leqslant u_t^{(i)}(\mathbf{0}) \leqslant v_t^h(0).$$

Extinction partielle et conservativité pour les PBCM
Clément Lamoureux
Explosion des processus de branchement continus
PBC
Étude de l'explosion
Exctinction partielle pour les processus multitypes
PBCM
Couplage des PBCM
Extinction partielle
Conservativité pour les processus multitypes
Conservativité pour les PBCM
Résultats généraux

Proposition

Si g, h sont des fonctions assez régulières, telles que pour tous $x > 0$ et $i \in [d]$,

$$h(x) < \widetilde{\psi}_i(x) < g(x),$$

alors, pour tous $t \geqslant 0$, $i \in [d]$, et $\lambda \in \Delta$

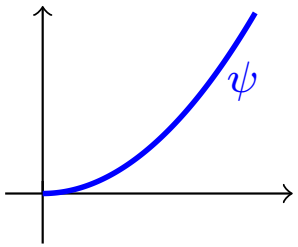
$$v_t^g(\lambda_1) \leqslant u_t^{(i)}(\boldsymbol{\lambda}) \leqslant v_t^h(\lambda_1).$$

En particulier, pour $t > 0$ et $i \in [d]$,

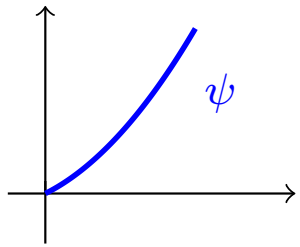
$$v_t^g(0) \leqslant u_t^{(i)}(\mathbf{0}) \leqslant v_t^h(0).$$

Extinction partielle et conservativité pour les PBCM
Clément Lamoureux
Explosion des processus de branchement continus
PBC
Étude de l'explosion
Exctinction partielle pour les processus multitypes
PBCM
Couplage des PBCM
Extinction partielle
Conservativité pour les processus multitypes
Conservativité pour les PBCM
Résultats généraux

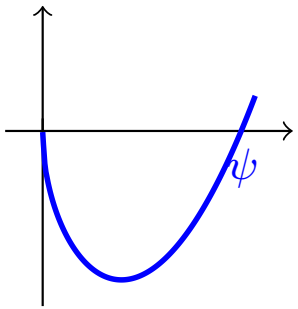
Le comportement en l'infini de X un processus de Lévy sans sauts négatifs d'exposant ψ, est déterminé par $\psi'(0+)$



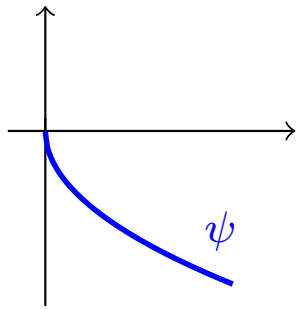
(1) $\psi'(0+) = 0$ et X oscille



(2) $\psi'(0+) > 0$, $\lim_{t\to\infty} X_t = -\infty$



(3) $\psi'(0+) < 0$, $\lim_{t\to\infty} X_t = \infty$, $t \mapsto X_t$ non croissante



(4) $\psi'(0+) < 0$, $\psi \leqslant 0$, X subordinateur

Extinction partielle et conservativité pour les PBCM
Clément Lamoureux
Explosion des processus de branchement continus
PBC
Étude de l'explosion
Exctinction partielle pour les processus multitypes
PBCM
Couplage des PBCM
Extinction partielle
Conservativité pour les processus multitypes
Conservativité pour les PBCM
Résultats généraux

Théorème

Si ψ satisfait la condition

$$\int_{0+} \frac{du}{\left|\sum_{i=1}^{d} \widetilde{\psi}_i(u)\right|} = \infty,$$

alors Z est conservatif.

Extinction partielle et conservativité pour les PBCM
Clément Lamoureux
Explosion des processus de branchement continus
PBC
Étude de l'explosion
Exctinction partielle pour les processus multitypes
PBCM
Couplage des PBCM
Extinction partielle
Conservativité pour les processus multitypes
Conservativité pour les PBCM
Résultats généraux

Pour utiliser la proposition d'encadrement, on doit majorer par une même fonction g toutes les fonctions $\tilde{\psi}_i$. Pour obtenir $v_t^g(0) > 0$, alors toutes les fonctions $\tilde{\psi}_i$ doivent être d'inverse non intégrable en 0.

Pour remédier à ce problème, on peut ne considérer que certains types du processus $\mathbb{Z}$. Pour un ensemble $J \subset [d]$, on note $e(J)$ le vecteur de $\mathbb{R}^d$ définit par $e(J)_i = 1$ si $i \in J$, 0 sinon. On définit alors pour $i \in J$

$$\tilde{\psi}_i^J(u) = \psi_i(ue(J))$$

Extinction partielle et conservativité pour les PBCM
Clément Lamoureux
Explosion des processus de branchement continus
PBC
Étude de l'explosion
Exctinction partielle pour les processus multitypes
PBCM
Couplage des PBCM
Extinction partielle
Conservativité pour les processus multitypes
Conservativité pour les PBCM
Résultats généraux

Pour utiliser la proposition d'encadrement, on doit majorer par une même fonction g toutes les fonctions $\tilde{\psi}_i$. Pour obtenir $v_t^g(0) > 0$, alors toutes les fonctions $\tilde{\psi}_i$ doivent être d'inverse non intégrable en 0.
Pour remédier à ce problème, on peut ne considérer que certains types du processus $\mathbb{Z}$. Pour un ensemble $J \subset [d]$, on note $e(J)$ le vecteur de $\mathbb{R}^d$ définit par $e(J)_i = 1$ si $i \in J$, 0 sinon. On définit alors pour $i \in J$

$$\tilde{\psi}_i^J(u) = \psi_i(ue(J))$$

Extinction partielle et conservativité pour les PBCM
Clément Lamoureux
Explosion des processus de branchement continus
PBC
Étude de l'explosion
Exctinction partielle pour les processus multitypes
PBCM
Couplage des PBCM
Extinction partielle
Conservativité pour les processus multitypes
Conservativité pour les PBCM
Résultats généraux

Théorème

Si il existe $J \subset [d]$, non vide, tel que pour tout $i \in J$

$$\int_{0+} \frac{du}{|\tilde{\psi}_i^J(u)|} < \infty,$$

alors Z est non conservatif.

Corollaire

Si il existe $N \in \mathbb{N}$ et une suite d'indices $i_1, \dots, i_N$ tels que pour tout $2 \leqslant n \leqslant N$, $\psi_{i_{n-1}i_n}$ et $\psi_{i_N i_1}$, vérifiant la condition de Grey en 0, c'est-à-dire

$$\int_{0+} \frac{du}{|\psi_{i_{n-1}i_n}|(u)} < \infty \text{ et } \int_{0+} \frac{du}{|\psi_{i_N i_1}|(u)} < \infty,$$

alors Z est non conservatif. En particulier, si il existe $i \in [d]$ tel que $\int_{0+} \frac{du}{|\psi_{ii}|(u)} < \infty$, alors Z est non conservatif.

Extinction partielle et conservativité pour les PBCM
Clément Lamoureux
Explosion des processus de branchement continus
PBC
Étude de l'explosion
Exctinction partielle pour les processus multitypes
PBCM
Couplage des PBCM
Extinction partielle
Conservativité pour les processus multitypes
Conservativité pour les PBCM
Résultats généraux

Théorème

Si il existe $J \subset [d]$, non vide, tel que pour tout $i \in J$

$$\int_{0+} \frac{du}{|\tilde{\psi}_i^J(u)|} < \infty,$$

alors Z est non conservatif.

Corollaire

Si il existe $N \in \mathbb{N}$ et une suite d'indices $i_1, \dots, i_N$ tels que pour tout $2 \leqslant n \leqslant N$, $\psi_{i_{n-1}i_n}$ et $\psi_{i_N i_1}$, vérifiant la condition de Grey en 0, c'est-à-dire

$$\int_{0+} \frac{du}{|\psi_{i_{n-1}i_n}|(u)} < \infty \text{ et } \int_{0+} \frac{du}{|\psi_{i_N i_1}|(u)} < \infty,$$

alors Z est non conservatif. En particulier, si il existe $i \in [d]$ tel que $\int_{0+} \frac{du}{|\psi_{ii}|(u)} < \infty$, alors Z est non conservatif.

Extinction partielle et conservativité pour les PBCM
Clément Lamoureux
Explosion des processus de branchement continus
PBC
Étude de l'explosion
Exctinction partielle pour les processus multitypes
PBCM
Couplage des PBCM
Extinction partielle
Conservativité pour les processus multitypes
Conservativité pour les PBCM
Résultats généraux

On considère Z associé à la matrice de processus de Lévy

$$\mathbb{X} = \begin{pmatrix} X^{11} & X^{12} \\ X^{21} & X^{22} \end{pmatrix}$$

On suppose que $X^{12} \not\equiv 0$ et $X^{21} \not\equiv 0$. Le seul cas qu'il reste à caractériser pour $d = 2$ est celui où toutes les conditions suivantes sont satisfaites :

- $\int_{0+} \frac{du}{|\psi_{11}(u)|} = \int_{0+} \frac{du}{|\psi_{22}(u)|} = \infty$
- $X^{11} \not\equiv 0$ ou $X^{22} \not\equiv 0$
- $\int_{0+} \frac{du}{|\tilde{\psi}_1(u)|} = \infty$ ou $\int_{0+} \frac{du}{|\tilde{\psi}_2(u)|} = \infty$, et $\int_{0+} \frac{du}{|\tilde{\psi}_1(u) + \tilde{\psi}_2(u)|} < \infty$.

Extinction partielle et conservativité pour les PBCM
Clément Lamoureux
Explosion des processus de branchement continus
PBC
Étude de l'explosion
Exctinction partielle pour les processus multitypes
PBCM
Couplage des PBCM
Extinction partielle
Conservativité pour les processus multitypes
Conservativité pour les PBCM
Résultats généraux

On considère Z associé à la matrice de processus de Lévy

$$\mathbb{X} = \begin{pmatrix} X^{11} & X^{12} \\ X^{21} & X^{22} \end{pmatrix}$$

On suppose que $X^{12} \not\equiv 0$ et $X^{21} \not\equiv 0$. Le seul cas qu'il reste à caractériser pour $d = 2$ est celui où toutes les conditions suivantes sont satisfaites :

- $\int_{0+} \frac{du}{|\psi_{11}(u)|} = \int_{0+} \frac{du}{|\psi_{22}(u)|} = \infty$
- $X^{11} \not\equiv 0$ ou $X^{22} \not\equiv 0$
- $\int_{0+} \frac{du}{|\tilde{\psi}_1(u)|} = \infty$ ou $\int_{0+} \frac{du}{|\tilde{\psi}_2(u)|} = \infty$, et $\int_{0+} \frac{du}{|\tilde{\psi}_1(u) + \tilde{\psi}_2(u)|} < \infty$.

Extinction partielle et conservativité pour les PBCM
Clément Lamoureux
Explosion des processus de branchement continus
PBC
Étude de l'explosion
Exctinction partielle pour les processus multitypes
PBCM
Couplage des PBCM
Extinction partielle
Conservativité pour les processus multitypes
Conservativité pour les PBCM
Résultats généraux

On considère Z associé à la matrice de processus de Lévy

$$\mathbb{X} = \begin{pmatrix} X^{11} & X^{12} \\ X^{21} & X^{22} \end{pmatrix}$$

On suppose que $X^{12} \not\equiv 0$ et $X^{21} \not\equiv 0$. Le seul cas qu'il reste à caractériser pour $d = 2$ est celui où toutes les conditions suivantes sont satisfaites :

- $\int_{0+} \frac{du}{|\psi_{11}(u)|} = \int_{0+} \frac{du}{|\psi_{22}(u)|} = \infty$
- $X^{11} \not\equiv 0$ ou $X^{22} \not\equiv 0$
- $\int_{0+} \frac{du}{|\tilde{\psi}_1(u)|} = \infty$ ou $\int_{0+} \frac{du}{|\tilde{\psi}_2(u)|} = \infty$, et $\int_{0+} \frac{du}{|\tilde{\psi}_1(u) + \tilde{\psi}_2(u)|} < \infty$.

Extinction partielle et conservativité pour les PBCM
Clément Lamoureux
Explosion des processus de branchement continus
PBC
Étude de l'explosion
Exctinction partielle pour les processus multitypes
PBCM
Couplage des PBCM
Extinction partielle
Conservativité pour les processus multitypes
Conservativité pour les PBCM
Résultats généraux

On considère Z associé à la matrice de processus de Lévy

$$\mathbb{X} = \begin{pmatrix} X^{11} & X^{12} \\ X^{21} & X^{22} \end{pmatrix}$$

On suppose que $X^{12} \not\equiv 0$ et $X^{21} \not\equiv 0$. Le seul cas qu'il reste à caractériser pour $d = 2$ est celui où toutes les conditions suivantes sont satisfaites :

- $\int_{0+} \frac{du}{|\psi_{11}(u)|} = \int_{0+} \frac{du}{|\psi_{22}(u)|} = \infty$
- $X^{11} \not\equiv 0$ ou $X^{22} \not\equiv 0$
- $\int_{0+} \frac{du}{|\tilde{\psi}_1(u)|} = \infty$ ou $\int_{0+} \frac{du}{|\tilde{\psi}_2(u)|} = \infty$, et $\int_{0+} \frac{du}{|\tilde{\psi}_1(u) + \tilde{\psi}_2(u)|} < \infty$.

Extinction partielle et conservativité pour les PBCM
Clément Lamoureux
Explosion des processus de branchement continus
PBC
Étude de l'explosion
Exctinction partielle pour les processus multitypes
PBCM
Couplage des PBCM
Extinction partielle
Conservativité pour les processus multitypes
Conservativité pour les PBCM
Résultats généraux

On peut construire ϕ_1 et ϕ_2 deux exposants de Laplace de subordinateurs tels que

$$\int_{0+} \frac{du}{\phi_1(u)} = \int_{0+} \frac{du}{\phi_2(u)} = \infty \text{ et } \int_{0+} \frac{du}{\phi_1(u) + \phi_2(u)} < \infty.$$

Ainsi avec le choix pour $i = 1, 2$

$$-\psi_i(\lambda) = \phi_1(\lambda_1) + \phi_2(\lambda_2),$$

Le processus Z est non conservatif, alors que pour tous $i, j = 1, 2$,

$$\int_{0+} \frac{du}{|\psi_{ij}(u)|} = \infty.$$

Extinction partielle et conservativité pour les PBCM

Clément Lamoureux

Explosion des processus de branchement continus

PBC

Étude de l'explosion

Exctinction partielle pour les processus multitypes

PBCM

Couplage des PBCM

Extinction partielle

Conservativité pour les processus multitypes

Conservativité pour les PBCM

Résultats généraux

Merci pour votre attention !